**UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR**
DEPARTAMENTO DE COMPUTACIÓN Y
TECNOLOGÍA DE LA INFROMACIÓN
ESTRUCTURAS DISCRETAS I

## GUÍA PRÁCTICA Nº 2

1. Demuestre lo siguiente mediante inducción matemática:

   a) $1\cdot 3 + 2\cdot 4 + 3\cdot 5 + \dots + n(n+2) = \dfrac{n(n+1)(2n+7)}{6}$

   **b)** $\sum_{i=0}^{n-1} 2^i = 2^n - 1$

   **c)** $\sum_{i=1}^{n} (i)(i!) = (n+1)! - 1$

   d) $5^n+2\cdot 3^{n-1}+1$ es múltiplo de 8, para todo entero positivo n.

   e) $3^{2n+1}+2^{n+2}$ es múltiplo de 7, para todo entero positivo n

2. Si A={1,2,3,4}, B={2,5} y C={3,4,7}, determine AxB; BxA; (AUB)xC; (AxC)U(BxC).

3. Si A={1,2,3} y B={2,4,5}, de ejemplos de

   a) tres relaciones no vacías de A en B.

   b) tres relaciones binarias no vacías en A.

4. Sean A={1,2,4,8,16} y B={1,2,3,4,5,6,7}. Si (2-x,5),(4,y-2) $\in$ AxB, ¿es posible que se cumpla que (2-x,5)=(4,y-2)?

5. Sean A, B y C conjuntos tales que $|A| = 5$ y $|B| = 7$. Determine lo siguiente: a) $|A\times B|$; b) $|B\times B|$; c) el número de relaciones de A en B (recuerde que pueden existir relaciones vacías) ; d) el número de relaciones binarias en A y e) el número de relaciones binarias en B.

6. Sean A, B, C y D conjuntos no vacíos. Demuestre que:

   a) $A\times(B\cap C) = (A\times B)\cap(A\times C)$

   b) $A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$

   c) $(A\cap B)\times C = (A\times C)\cap(B\times C)$

   d) $(A\times B)\cap(B\times A) = (A\cap B)\times(A\cap B)$

   e) $A\times B\subseteq C\times D$ si y sólo si $A\subseteq C$ y $B\subseteq D$.

7. ¿Seguiría siendo válida la proposición anterior si algunos de los conjuntos A, B, C y D son vacíos?

8. Sean A y B conjuntos con $|B|= 3$. Si existen 4096 relaciones de B en A, ¿cuánto vale $|A|$?

9. Sean A = {-2,-1,0,1,2} y **R** una relación en A definida como sigue: a**R**b si y sólo si $a^2 - 4b^2 = 2b - a$.

a) Determine a **R** por extensión.

b) Determine el *dominio* y el *rango* de **R**.

c) Trace el *digrafo* de **R**.

10. Si A={1,5,7,8}, dé un ejemplo de una relación R sobre A que sea: a) reflexiva y simétrica, pero no transitiva; b) reflexiva y transitiva, pero no simétrica; c) simétrica y transitiva, pero no reflexiva.

11. Para cada una de las siguientes relaciones, determine si la relación es reflexiva, irreflexiva, no reflexiva, simétrica, asimétrica, antisimétrica, no simétrica, transitiva o no transitiva.

    a) Para un universo dado **U** y un subconjunto fijo C de **U**, definimos R sobre P(**U**) ("partes de **U**") como sigue: para cualesquiera $A,B \subseteq \mathbf{U}$ tenemos que ARB si y sólo si $A \cap C = B \cap C$.

    b) R es la relación sobre **Z** tal que xRy si y sólo si x+y es par.

    c) R es la relación sobre **Z** tal que xRy si y sólo si x+y es impar.

    d) R es la relación sobre **Z** tal que aRb si y sólo si (a,b) = 1, es decir, si a y b son primos relativos.

    e) R es la relación sobre **ZxZ** tal que (a,b)R(c,d) si y sólo si $a \leq c$.

    f) R es la relación sobre **Q** tal que aRb si y sólo si $|a- b| < 1$.

    g) Para A = {1,2,3,4}x{1,2,3,4}, definamos R sobre A como $(x_1,y_1)R(x_2,y_2)$ si y sólo si $|x_1 - y_1| = |x_2 - y_2|$.

12. Sean A = {2,2,4,6,8,10} y **R** una relación en A tal que a**R**b si y sólo si a+b es múltiplo de 4.

    a) Obtenga $\mathbf{M}_{\mathbf{R}}$.; b) Determine si **R** es reflexiva, simétrica, antisimétrica o transitiva; c) ¿Es **R** una relación de equivalencia? ; d) ¿Es **R** una relación de orden parcial?

13. Para cada una de las siguientes proposiciones acerca de las relaciones sobre un conjunto A, con $|A|= n$, determine si la proposición es *verdadera* o *falsa*. Si es *falsa*, dé un contraejemplo.

    a) Si R es una relación reflexiva sobre A, entonces $|R| \geq n$.

    b) Si R es una relación sobre A y $|R| \geq n$, entonces R es reflexiva.

    c) Sean $R_1$ y $R_2$ relaciones sobre A y $R_1 \subseteq R_2$. Si $R_1$ es reflexiva, entonces $R_2$ es reflexiva.

    d) Sean $R_1$ y $R_2$ relaciones sobre A y $R_1 \subseteq R_2$. Si $R_1$ es simétrica, entonces $R_2$ es simétrica.

    e) Sean $R_1$ y $R_2$ relaciones sobre A y $R_1 \subseteq R_2$. Si $R_1$ es transitiva, entonces $R_2$ es transitiva.

    f) Lo mismo que en c), d) y e) pero cambiando "$R_1 \subseteq R_2$" por "$R_2 \subseteq R_1$".

14. Sea A un conjunto tal que $|A|= n$ y sea R una relación sobre A antisimétrica. ¿Cuál es el máximo valor posible de $|R|$?

15. Sea A un conjunto tal que $|A|= n$ y sea R una relación de equivalencia sobre A tal que $|R|=r$. ¿Por qué r-n siempre es par?

16. Dé un ejemplo de una relación R sobre **Z** que sea transitiva e irreflexiva pero que no sea simétrica.

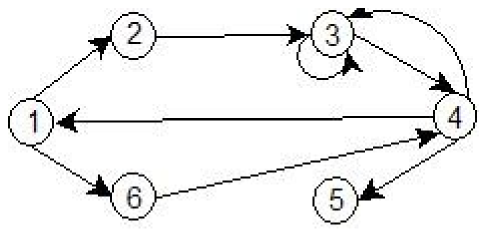
17. Sea R una relación binaria no vacía sobre un conjunto A. Demuestre que: a) Si R es irreflexiva y simétrica, entonces no es transitiva.; b) Si R es irreflexiva y transitiva, entonces no es simétrica; c) Si R es transitiva y simétrica, entonces no es irreflexiva.

18. Para A={1,2,3,4}, sean R y S las relaciones sobre A definidas como R={(1,2),(1,3),(2,4),(4,4)} y S={(1,1),(1,2),(1,3),(2,3),(2,4)}. Determine $R^1$, $S^1$, RoS, SoR, $R^2$, $R^3$, $S^2$ y $S^3$.

19. Si R es una relación reflexiva sobre un conjunto A, demuestre que $R^2$ es también reflexiva sobre A.

20. Si A={1,2,3,4}, sea R={(1,1),(1,2),(2,3),(3,3),(3,4),(4,4)} una relación sobre A. Encuentre dos relaciones S y T sobre A tales que S ≠ T, pero RoS=RoT={(1,1),(1,2),(1,4)}.

21. Sea R una relación sobre A={1,2,3,4,5,6} cuyo digrafo se muestra a continuación:




   a) Haga una lista de todas las trayectorias de longitud 1.
   b) Haga una lista de todas las trayectorias de longitud 2, que inicien en el vértice 2.
   c) Haga una lista de todas las trayectorias de longitud 2.
   d) Haga una lista de todas las trayectorias de longitud 3, que inicien en el vértice 3.
   e) Haga una lista de todas las trayectorias de longitud 3.
   f) Encuentre un ciclo que comience en el vértice 2.
   g) Encuentre un ciclo que comience en el vértice 6.
   h) Trace el digrafo de $R^2$.
   i) Determine las matrices de R y $R^2$.

22. Sean A={1,2,3} y R={(1,1),(1,2),(2,3),(1,3),(3,1),(3,2)}$\subseteq A^2$. Obtenga las cerraduras reflexiva, simétrica y transitiva de R.

23. Sean A={a,b,c,d} y R={(a,b),(b,c),(a,c),(c,d)}$\subseteq A^2$. Obtenga las cerraduras reflexiva, simétrica y transitiva de R.

24. Sea A={$a_1$,$a_2$,$a_3$,$a_4$,$a_5$} y sea R una relación sobre A cuya matriz es

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Obtenga las matrices de las cerraduras reflexiva, simétrica y transitiva de R.

25. Si A={1,2,3,4,5} y R es una relación de equivalencia sobre A que induce la partición A={1,2}U{3,4}U{5}. Describa a R por extensión.

26. Sea R la siguiente relación de equivalencia en el conjunto A={1,2,3,4,5,6}:

R={(1,1),(1,5),(2,2),(2,3),(2,6),(3,2),(3,3),(3,6),(4,4),(5,1),(5,5),(6,2),(6,3),(6,6)}

Encontrar la partición de A *inducida* por R.

27. Sea A = {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9} y sea R la relación de equivalencia en AxA definida por (a,b)R(c,d) si y sólo si a + d = b + c. Obtenga la clase de equivalencia de (2,5).

28. Demuestre que si R es una relación de equivalencia en un conjunto A, entonces $R^{-1}$ es también una relación de equivalencia en A.

29. Sea A={1,2,3,...,19,20}. Sea R la relación de equivalencia en A definida por (x,y)∈R si y sólo si x ≡ y(mód 5). Encuentre la partición de A inducida por R, es decir, el conjunto cociente A/R.

30. Sea A = {w,x,y,z} y R la relación en A cuya matriz viene dada por:

$$M_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Obtenga: a) La cerradura reflexiva de R.; b) La cerradura simétrica de R.; c) La cerradura transitiva de R.

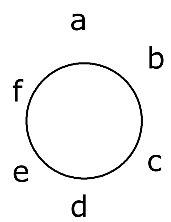
31. Sea A = {w,x,y,z} y **R** la relación en A cuya matriz viene dada por:

$$M_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Obtenga: a) La matriz de la *cerradura reflexiva* de **R; b)** La matriz de la *cerradura simétrica* de **R**.; c) La matriz de la *cerradura transitiva* de **R**.

32. Trace el diagrama de Hasse para el conjunto parcialmente ordenado (P(**U**),⊆), donde **U**={1,2,3,4}.

33. Sea A = {a,b,c,d,e,f} un conjunto formado por seis personas que están sentadas alrededor de una mesa, tal como se indica en la figura:



Diremos que x está relacionado con y (xRy) si x está dos puestos a la izquierda de y.

a) Obtenga la matriz de la relación R.

b) ¿Es la relación R *reflexiva*? Explique.

c) Dibuje el digrafo de la relación R.

d) Demuestre que la cerradura transitiva de R, $R^{(t)}$, es una *relación de equivalencia*.

e) Describa, por extensión, el conjunto cociente $A/R^{(t)}$.

34. Sean A = {1,2,3,4,5,6} y **R** la relación dada por x**R**y si y sólo si |x - y| = 1.

a) Trace el digrafo (o grafo dirigido) de **R**.

b) Obtenga la matriz de $\mathbf{R}^{(r)}$ (la *cerradura reflexiva* de **R**).

c) ¿Es $\mathbf{R}^{(r)}$ una *relación de equivalencia*? *(Use matrices booleanas).*

35. Sea A={1,2,3,6,9,18} y defina R sobre A por xRy ssi y es múltiplo de x. Trace el diagrama de Hasse para el conjunto parcialmente ordenado (A,R). Obtenga, además, todas las cadenas maximales de (A,R)

36. Sean $(A,R_1)$, $(B,R_2)$, dos conjuntos parcialmente ordenados. En AxB se define la relación R por (a,b)R(c,d) si $aR_1c$ y $bR_2d$. Demuestre que R es un orden parcial.

37. Si en el ejercicio anterior, las relaciones $R_1$ y $R_2$ son órdenes totales, ¿es R un orden total?

38. Ordene topológicamente los diagramas de Hasse de los conjuntos parcialmente ordenados definidos en los ejercicios 28 y 29.

39. Sean A = {1,2,3,4,5,6} y R una relación en A cuya matriz representación viene dada por:

$$\mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Determine a R y $R^2$ por extensión.

b) Dibuje los grafos dirigidos (o digrafos) de R y $R^2$.

c) Demuestre que R es un orden parcial.

d) Trace el diagrama de Hasse de (A,R).

e) Determine todos los elementos maximales, minimales, primer elemento (mínimo) y último elemento (máximo) para el orden parcial R.

f) Ordene topológicamente el conjunto parcialmente ordenado (A,R).

40. Sean A = {a,b,c,d,e,f} y R una relación en A donde R = {(a,a), (a,b), (a,e), (a,c), (b,c), (b,b), (c,c), (d,e), (d,a), (d,b), (d,c), (d,d), (e,c), (e,e), (f,e), (f,c), (f,f)}.

a) Obtenga la matriz de la relación R.

b) Demuestre que R es un orden parcial (utilizando matrices booleanas).

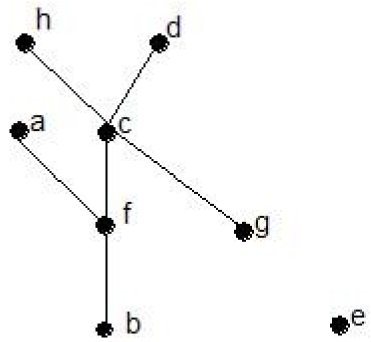
c) Trace el diagrama de Hasse de (A,R).

d) Obtenga *todas* las cadenas de (A,R) con longitud 3 e indique cuáles de ellas son *maximales*.

e) Determine todos los elementos maximales, minimales, primer elemento (mínimo) y último elemento (máximo) para el orden parcial R.

f) Ordene topológicamente el conjunto parcialmente ordenado (A,R).

41. Sean A = {a,b,c,d,e,f,g,h} y **R** una relación de orden parcial en A cuyo diagrama de Hasse se muestra a continuación:



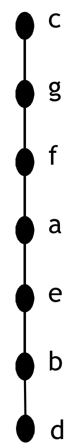

a) Determine todos los elementos maximales, minimales, primer elemento (mínimo) y último elemento (máximo) para el orden parcial **R**.

b) Ordene topológicamente el conjunto parcialmente ordenado (A,**R**).

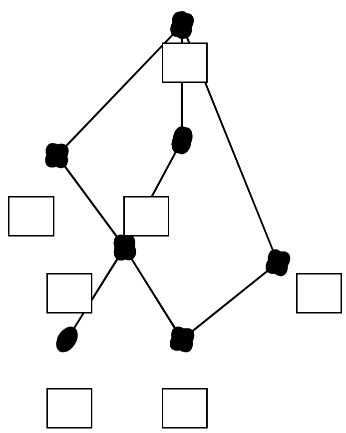
c) Obtenga *todas* las cadenas de (A,**R**) con longitud 3 e indique cuáles de ellas son *maximales*.

d) Obtenga el diagrama de Hasse de $\mathbf{R}^{-1}$. *(La relación $R^{-1} \subseteq A^2$, es también un orden parcial).*

42. Sea **R*** una relación de orden total sobre el conjunto A = {a,b,c,d,e,f,g} y cuyo diagrama de Hasse se muestra a continuación:




43. Complete los recuadros del siguiente diagrama de Hasse con los elementos del conjunto A con el fin de obtener una relación de orden parcial **R** sobre A cuya ordenación topológica sea **R***.



a) Determine todos los elementos maximales, minimales, primer elemento (mínimo) y último elemento (máximo) para el orden parcial **R** construido por usted en a).

b) Obtenga *todas* las cadenas de (A,**R**) con longitud 3 e indique cuáles de ellas son *maximales*.

44. Dé un ejemplo de un conjunto parcialmente ordenado con tres elementos maximales pero que no tenga primer elemento (o *mínimo*).

45. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos están *bien ordenados*?

a) $(\mathbf{N},\leq)$ b) $(\mathbf{Z},\leq)$ c) $(\mathbf{N},\geq)$

d) $(\mathbf{Q},\leq)$ e) $(\mathbf{Q}^+,\leq)$ f) $(\mathbf{Q}^-,\leq)$

g) $(\mathbf{P},\leq)$, donde **P** es el conjunto de todos los primos en $\mathbf{Z}^+$.

h) $(A,\leq)$, donde A es un subconjunto cualquiera no vacío de $\mathbf{Z}^+$.

i) $(\mathbf{Z}^+,|)$, donde "|" es la relación "divide a".

46. Sean los conjuntos totalmente ordenados ($\mathbf{N}$,$\leq$) y ($\mathbf{Z}^+$,$\leq$). Si se considera al conjunto totalmente ordenado ($\mathbf{N}$x$\mathbf{Z}^+$,R), donde R es el orden lexicográfico, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles son falsas?

| | | |
|---|---|---|
| a) (5,78)R(7,1) | b) (4,6)R(4,2) | c) (5,5)R(4,23) |
| d) (1,3)R(1,7) | e) (0,8)R(0,8) | f) (8,7)R(7,8) |

47. Sean los conjuntos totalmente ordenados (A,$R_1$) y (B,$R_2$), donde A = {3,12,22,13,7,4} es un sistema completo de restos módulo 6, B = {$x \in \mathbf{Z}$ / $x = 2^n$, con $n \in \mathbf{Z}^+$} y las relaciones $R_1$ y $R_2$ se definen como:

Para $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b} \in$ A, $\boldsymbol{a}R_1\boldsymbol{b}$ si y sólo si el resto que deja ***a*** al ser dividido por 6 es menor que el resto que deja ***b*** al ser dividido por 6.

Para $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b} \in$ B, $\boldsymbol{a}R_2\boldsymbol{b}$ si y sólo si $\boldsymbol{b} | \boldsymbol{a}$.

Si se considera al conjunto totalmente ordenado (AxB,R), donde R es el orden lexicográfico, ordene en forma *ascendente* la siguiente lista de elementos de AxB:

(22,4), (7,2), (4,32), (22,8), (3,8), (3,2), (3,16), (13,64)

48. Sean los conjuntos totalmente ordenados (A,$R_1$) y ($\mathbf{Z}^+$,$R_2$), donde A = {$x \in \mathbf{Z}$ / $x = 3^n$, con $n \in \mathbf{Z}^+$} y $R_1$ y $R_2$ se definen como:

Para $x,y \in A$, $xR_1y$ si y sólo si x es múltiplo de y

Para $x,y \in \mathbf{Z}^+$, $xR_2y$ si y sólo si $x \geq y$

Si se considera al conjunto totalmente ordenado (Ax$\mathbf{Z}^+$,R), donde R es el orden lexicográfico, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles son falsas?

| | |
|---|---|
| a) $(3^5,6)R(3^5,9)$ | b) $(3^4,15)R(3^8,15)$ |
| c) (27,2)R(9,8) | d) $(3^{10},12)R(3^{10},11)$ |